EX 30 :

$J(0,1,0)$

$\overrightarrow{OM} = \alpha.\vec{k}$

$\overrightarrow{AN} = \beta.\vec{i}$

1) $S : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$

2) M$(0,0,\alpha)$ et N$(\beta,2,0)$

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\beta\\2\\-\alpha\end{pmatrix}$$

$$(MN) : \begin{cases} x=k\beta \\ y=2k \\ z=\alpha-k\alpha \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

3) a) (MN) tangente à (S) ssi la distance de J à la droite (MN) est égale R=1

$$\Leftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{JM} \wedge \overrightarrow{MN}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = 1$$

$$\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}0\\-1\\\alpha\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\beta\\2\\-\alpha\end{pmatrix}$$

$$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+4}$$

$$\overrightarrow{JM} \wedge \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\beta\\\beta\end{pmatrix}$$

$$\left\|\overrightarrow{JM} \wedge \overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2}$$

(MN) tangente à (S) $\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{JM} \wedge \overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+4 = \alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2$

$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 = 4$

b) $\{Q\} = (MN) \cap S$

$$Q(x,y,z) \text{ tq : } \begin{cases} x=k\beta \\ y=2k \\ z=\alpha-k\alpha \\ x^2+(y-1)^2+z^2=1 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$k^2\beta^2 + (2k-1)^2 + \alpha^2(1-k)^2 = 1$

$\Leftrightarrow k^2\beta^2 + 4k^2 - 4k + 1 + \alpha^2(1-2k+k)^2 = 1$

$\Leftrightarrow k^2\beta^2 + 4k^2 - 4k + \alpha^2 - 2\alpha^2 k + \alpha^2.k^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2+4).k^2 - (4+2\alpha^2)k + \alpha^2 = 0$

$\Delta' = (2+\alpha^2)^2 - \alpha^2(\alpha^2+\beta^2=4)$

$\Delta' = 4 + 4\alpha^2 - \alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2 = 4 - (\alpha^2\beta^2)$

$\Delta' = 4 - 4 = 0$

d'où : $k = \frac{2+\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2+4}$

$$Q\left(\frac{(2+\alpha^2)\beta}{\alpha^2+\beta^2+4}, \frac{2(2+\alpha^2)}{\alpha^2+\beta^2+4}, \frac{2+\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+4}\right)$$

EX31 :

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn